Verfahren der linearen Optimierung

Das Verfahren arbeitet man in drei Schritten ab:
1. Aus den gegebenen Angaben Ungleichungen erstellen.
2. Ungleichungen in ein Koordinatensystem zeichnen um ein Planungsvieleck zu erhalten.
3. Mit oder ohne Zielwertgleichung die optimalen Punkte des Planungsvielecks bestimmen.

Beispiel aus der Wirtschaft:

Eine Firma TrinkFit stellt zwei Sorten von Getränken her. Sorte 1 herzustellen ist etwas aufwändiger, da hierfür mehr Zutaten und mehr Verarbeitungsschritte notwendig sind. Von Sorte 1 kann man daher höchstens 1200 Flaschen am Tag, und von Sorte 2 höchstens 1600 Flaschen am Tag herstellen. Insgesamt bekommt die Firma höchstens 2000 Flaschen Leergut täglich zum Abfüllen geliefert.

Welche möglichen Fragestellungen ergeben sich aus der Aufgabe?

____

____

1. Aus den gegebenen Angaben Ungleichungen erstellen:

Wie bei Gleichungssystemen muss man zunächst die Variablen benennen:

____________________ ____________________

(1) ____________________ ______ __________

(2) ____________________ ______ __________

(3) ____________________ ______ __________

(4) ____________________ ______ __________

(5) ____________________ ______ __________

Kommen in einer Ungleichungen zwei Variablen vor, muss man nach einer Variablen auflösen (meist y):

(1) ____________________ ______ __________

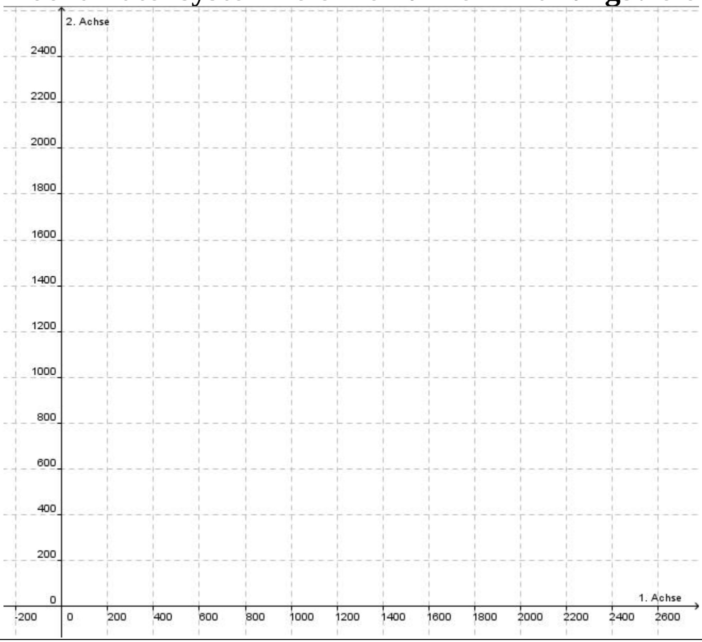
(2) ____________________ ______ __________

(3) ____________________ ______ __________

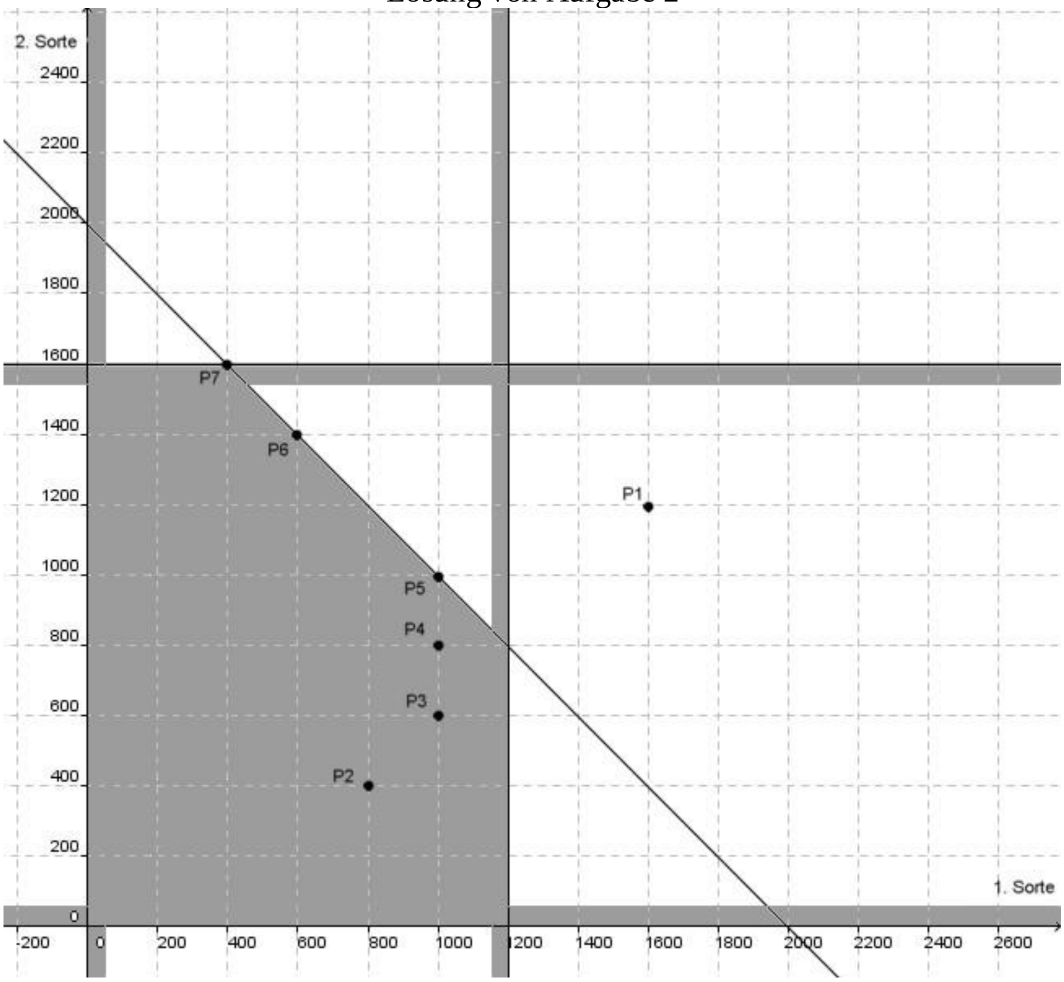
(4) ____________________ ______ __________

(5) ____________________ ______ __________

2. Ungleichungen in ein Koordinatensystem zeichnen um ein Planungsvieleck zu erhalten.



Lösung von Aufgabe 2



In diesem Fall erhalten wir als Planungsvieleck ein Planungsfünfeck!

Nun untersuchen wir einzelne Punkte im Planungsfünfeck:

Was kann man nun an den einzelnen Punkten ablesen?

____

____

	P1 Außenpunkt	**P2** Innenpunkt	**P3** Innenpunkt	**P4** Innenpunkt	**P5** Randpunkt	**P6** Randpunkt	**P7** Randpunkt
Anzahl Flaschen 1. Sorte							
Anzahl Flaschen 2. Sorte							
Gesamtanzahl Flaschen							
Gewinn: (Wird später eingetragen!)							

Erkenntnisse:
Außenpunkte: ____

Innen- , Rand- und Eckpunkte: ____

Rand- und Eckpunkte: ____

Vorsicht bei Rand- und Eckpunkten! Hier muss man immer genau unterscheiden, ob für die Gleichungen < bzw. > oder ≤ bzw. ≥ gilt.

Fazit: Es gibt also mehrere Möglichkeiten, die gestellte Aufgabe zu lösen, also 2000 Flaschen mit zwei Maschinen zu füllen.

Nun kann man eine weitere Bedingung hinzunehmen:

Aufgabe: Die Firma TrinkFit erhält einen Gewinn von 0,08 € bei der ersten Sorte und bei der zweiten Sorte einen Gewinn von 0,05 € pro Flasche. Wie sollte die Firma die Leerflaschen nun auf die zwei Abfüllmaschinen verteilen, damit sie einen möglichst großen Gewinn erzielt?

Vorüberlegungen:

Klar ist: 1. Man sollte so viele Flaschen wie möglich füllen, also alle 2000 Stück.

2. Man sollte möglichst viele Flaschen von Sorte 1 füllen, da hier der Gewinn größer ist.

Suche den Punkt, der diese Gleichung erfüllt und errechne den Gewinn: P (|), Gewinn: ___________

Damit ist die Aufgabe gelöst! Achtung! Manchmal können je nach Aufgabenstellung auch mehrere Punkte in Frage kommen.

Nicht immer ist der optimale Punkt so einfach zu bestimmen wie in diesem Beispiel. Dann geht man anders vor, indem man eine Zielwertgleichung erstellt.

In diesem Falle ist eine Gleichung gesucht, die den Gewinn pro abgefüllte Flaschen ermittelt:

____

Mit dieser Formel kann man errechnen, ____.

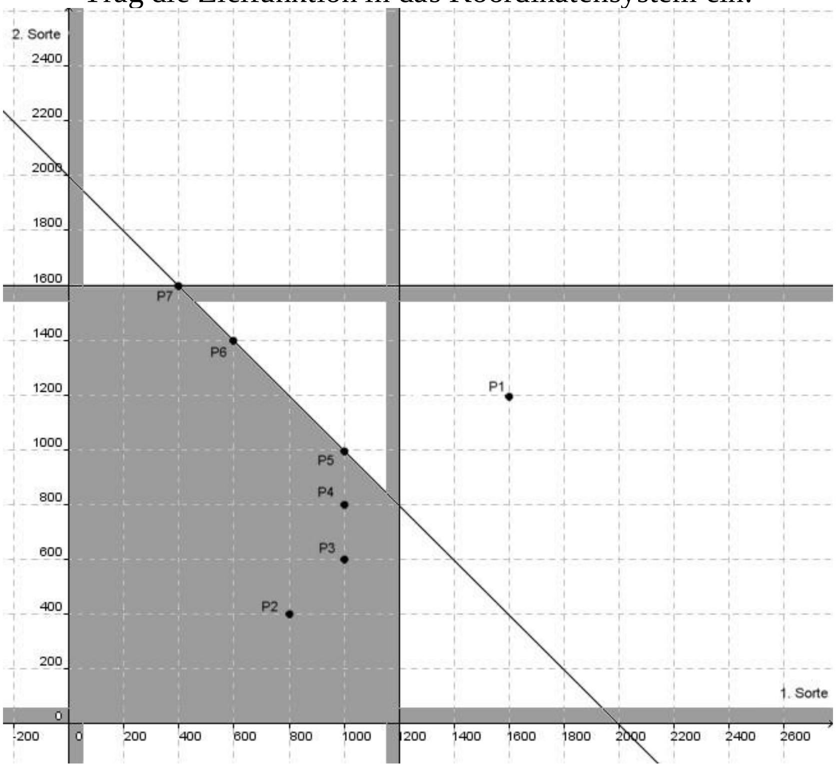
Allerdings kann man auch umgekehrt ermitteln,

____

Nimm an die Firma möchte 30 € Gewinn machen. Erstelle hierfür die Zielwertgleichung:

	Aufgelöst nach y:

Trag die Zielfunktion in das Koordinatensystem ein:

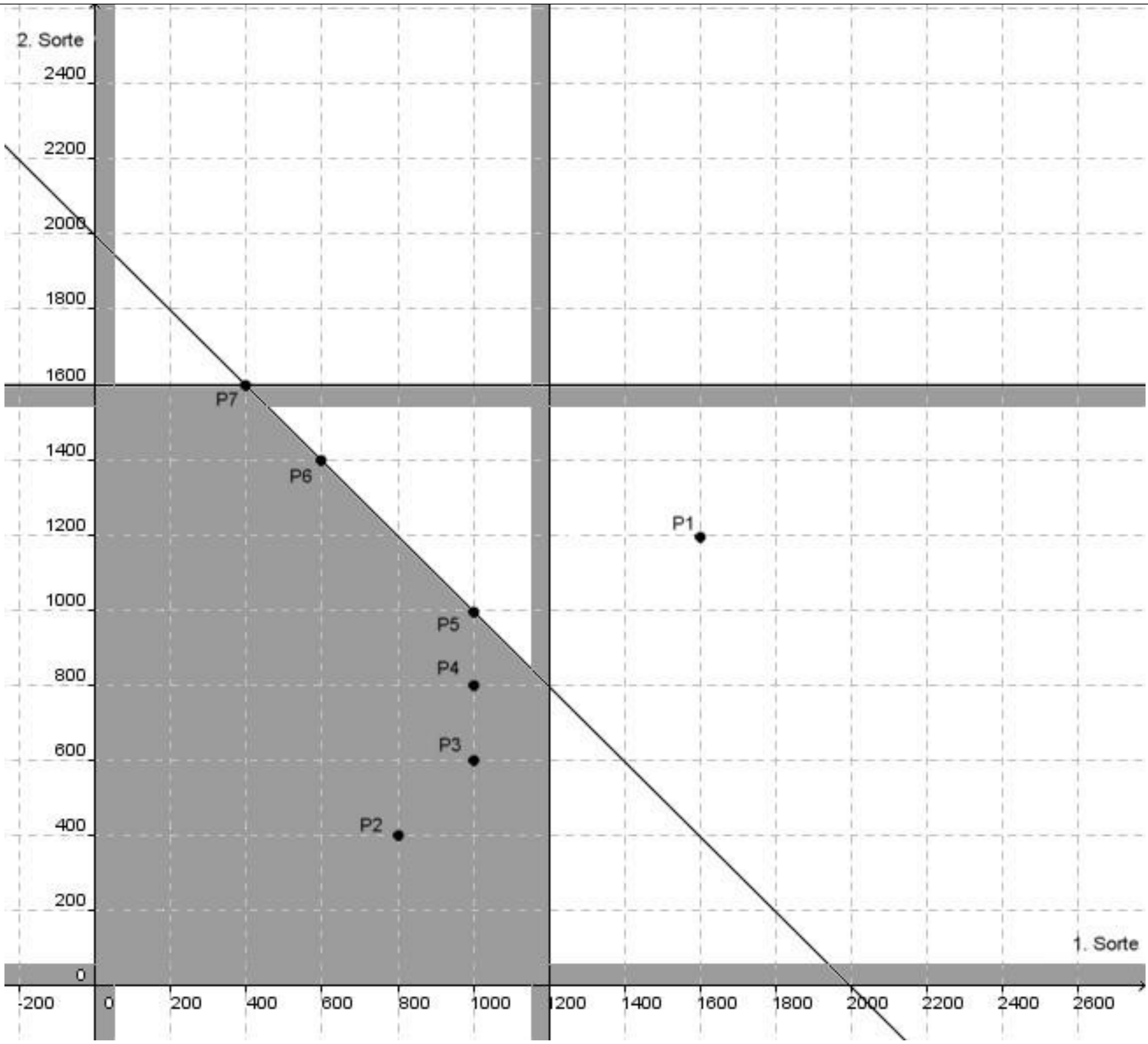


Welche möglichen Flaschenabfüllungen, ergeben einen Gewinn von 30 €?

P (|), P (|), P (|)

Nun möchte die Firma jedoch mehr verdienen. Trage die Zielfunktionen für einen Gewinn von 60€ und 90 € ein. Was fällt dir auf?

Um nun die Abfüllkombination der Flaschen festzustellen, die den meisten Gewinn abwirft, muss man die Zielfunktion mit dem Geodreieck soweit wie möglich nach oben verschieben, aber dabei höchstens soweit, dass noch mindestens ein Punkt des Planungsvielecks auf der Zielgeraden liegt.
Anmerkung: Manchmal muss man auch die Zielgerade nach unten verschieben, wenn man kein Maximum, sondern ein Minimum sucht, z.B. bei einem Verpackungsproblem, wo man möglichst wenig Material verbrauchen will.

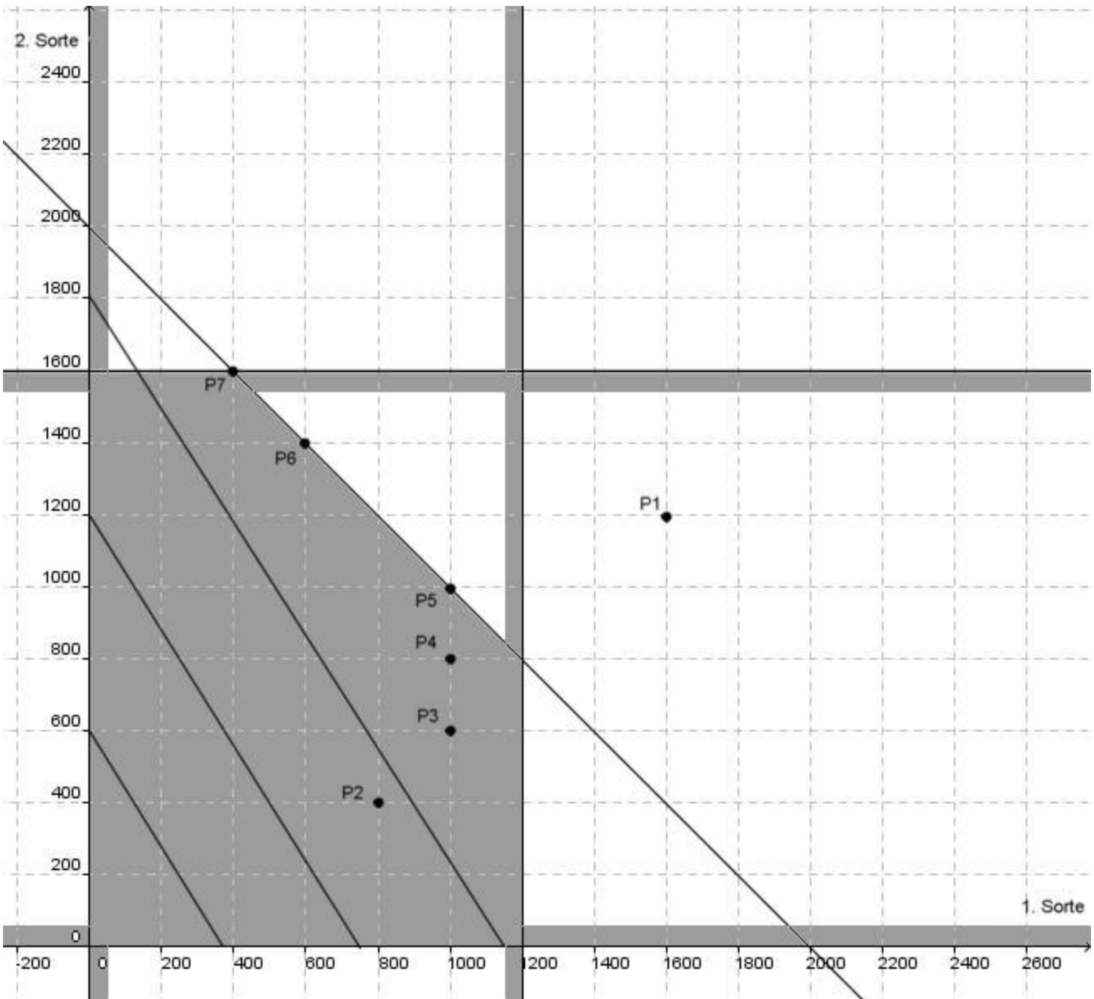


So ermitteln wir folgenden Punkt: P (|)

Um zu sehen, wie groß dann der Gewinn sein wird, setzen wir die gefunden Werte in die Zielgleichung ein:

G = 0,05 · _______ + 0,08 · _______ = _________ Gewinn.

Dies ist der größte Gewinn, den die Firma unter diesen Vorgaben erzielen kann. Da sich dies nicht wirklich lohnt, ist die Firma Pleite gegangen, was allerdings dieses nette Verfahren hätte verhindern können, hätte man es einmal vor der Firmengründung angewendet.



2. Sorte
2400
2200
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
-200
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2400
2600
1. Sorte
P1
P2
P3
P4
P5
P6
P7